Синтез матриц преобразования перспективы

Г.А. Ситкарев, <sitkarev@komitex.ru>

Сыктывкарский Государственный Университет
Лаборатория Прикладной Математики и Программирования
http://amplab.syktsu.ru

1. Гипотеза о фотокамере

Наши дальнейшие выводы основываются на предположении, что искажения, вносимые фотокамерой, могут быть описаны с достаточной точностью в следующем виде:

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}\mathbf{T}, \tag{1}$$

где $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{T}$ — координата изображения (снимка), внешняя координата, и квадратная матрица, описывающая вносимые фотокамерой искажения. Если соответствующая пара координат изображения и внешних координат это

$$(x, y) \leftarrow (u, v),$$

то (1) задаёт фактически две функции:

$$x = X(u, v) \;\text{ и }\; y = Y(u, v).$$

Преобразование перспективы обладает рядом важных свойств, отличающих его от прочих преобразований:

1) Прямые линии всегда остаются прямыми.
2) Прямые линии, параллельные плоскости проекции, остаются параллельными ей.
3) Прямые линии, не параллельные плоскости проекции, устремляются к горизонту.

Если коэффициенты матрицы $\mathbf{T}$ известны, то обратное преобразование из координат изображения во внешние координаты можно осуществить через обратную матрицу

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(\mathbf{T})}{\det(\mathbf{T})}, \tag{2}$$

как

$$\mathbf{q}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{p}. \tag{3}$$

В силу свойств матрицы $\mathbf{T}$, деление или умножение на скаляр всех её элементов не изменяет самого преобразования. Деление на детерминант, который есть скалярное значение, поэтому можно опустить. Далее предполагается, что $\det(\mathbf{T}) \neq 0$.

2. Преобразование перспективы

В общем виде преобразование перспективы в матрично-векторной форме записывают так:

$$[x'\ y'\ w'] = [u\ v\ w]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [u\ v\ w]\,\mathbf{T}; \tag{4}$$

$$x = \frac{x'}{w'}, \quad y = \frac{y'}{w'}. \tag{5}$$

В (4) значение w можно выбирать произвольно, в дальнейшем нам будет удобно, если $w = 1$. Кроме того, матрица $\mathbf{T}$ может быть нормализована так, что $a_{33} = 1$ без потери её свойств. В общем случае a_{33} задаёт масштаб преобразования. Теперь можно переписать (4) и (5) в привычной форме преобразования перспективы:

$$x = \frac{a_{11}u + a_{21}v + a_{31}}{a_{13} + a_{23}v + 1}, \tag{6}$$

$$y = \frac{a_{12}u + a_{22}v + a_{32}}{a_{13} + a_{23}v + 1}. \tag{7}$$

Продолжим манипуляции с (6) и (7), переписав их в другом виде:

$$x(a_{13} + a_{23}v + 1) = a_{11}u + a_{21}v + a_{31},$$

$$x(a_{13} + a_{23}v + 1) = a_{12}u + a_{22}v + a_{32}.$$

Раскрывая скобки в левой части, и выполнив перенос в правую часть членов при a_{13} и a_{23}, получим

$$x = X(u, v) = a_{11}u + a_{21}v - a_{13}ux + a_{23}vx + a_{31}, \tag{8}$$

$$y = Y(u, v) = a_{12}u + a_{22}v - a_{13}uy + a_{23}vy + a_{32}. \tag{9}$$

Добавив нулевые множители к (8) и (9), можно увидеть, что они есть произведение векторов

$$X(u, v) = [u, v, 1, 0, 0, 0, -ux, -vx]\,[a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{13}, a_{23}]^{\mathrm{T}}, \tag{10}$$

$$Y(u, v) = [0, 0, 0, u, v, 1, -uy, -vy]\,[a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{13}, a_{23}]^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

3. Общий случай синтеза — ‘‘четырёхугольник в четырёхугольник’’

Преобразование перспективы обладает 8-ю степенями свободы (по числу коэффициентов в матрице). Это свойство даёт нам возможность связать координаты *любого* четырёхугольника во внешних координатах с ним же в координатах изображения. Пусть имеется четыре пары точек, задающих координаты углов соответствующих четырёхугольников:

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &\leftarrow (u_0, v_0), \\ (x_1, y_1) &\leftarrow (u_1, v_1), \\ (x_2, y_2) &\leftarrow (u_2, v_2), \\ (x_3, y_3) &\leftarrow (u_3, v_3). \end{aligned} \tag{12}$$

Составляя систему из 8-ми уравнений для каждой точки из (12), получим систему уравнений в матрично-векторной форме:

$$\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_0x_0 & -v_0x_0 \\ u_1 & v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1x_1 & -v_1x_1 \\ u_2 & v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_2x_2 & -v_2x_2 \\ u_3 & v_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_3x_3 & -v_3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_0 & v_0 & 1 & -u_0y_0 & -v_0y_0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & 1 & -u_1y_1 & -v_1y_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & v_2 & 1 & -u_2y_2 & -v_2y_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 & v_3 & 1 & -u_3y_3 & -v_3y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

решая которую для неизвестных $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{23}$, мы получим искомые коэффициенты матрицы преобразования перспективы.

4. Специальные случаи синтеза

4.1. Специальный случай — ‘‘единичный квадрат в четырёхугольник’’

Рассмотрим теперь не общий, а специальный случай, когда во внешних координатах единичному квадрату соответствует четырёхугольник в координатах изображения. В этом случае пары соответствующих точек имеют координаты

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &\leftarrow (0,0), \\ (x_1, y_1) &\leftarrow (1,0), \\ (x_2, y_2) &\leftarrow (1,1), \\ (x_3, y_3) &\leftarrow (0,1). \end{aligned} \tag{14}$$

Тогда система линейных уравнений (13) примет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & -x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -y_2 & -y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Систему (15) мы преобразуем к виду, удобному для дальнейших упрощений и формальных манипуляций:

$$\begin{aligned} a_{31} &= x_0, \\ a_{11} + a_{31} - a_{13}x_1 &= x_1, \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} - a_{13}x_2 - a_{23}x_2 &= x_2, \\ a_{21} + a_{31} - a_{23}x_3 &= x_3, \\ a_{32} &= y_0, \\ a_{12} + a_{32} - a_{13}y_1 &= y_1, \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} - a_{13}y_2 - a_{23}y_2 &= y_2, \\ a_{22} + a_{32} - a_{23}y_3 &= y_3. \end{aligned} \tag{16}$$

Введём для удобства следующие обозначения констант:

$$
\begin{aligned}
&b_1 = x_1 - x_0,\ \ c_1 = y_1 - y_0,\\
&b_2 = x_2 - x_0,\ \ c_2 = y_2 - y_0,\\
&b_3 = x_3 - x_0,\ \ c_3 = y_3 - y_0,\\
&b_4 = x_1 - x_2,\ \ c_4 = y_1 - y_2,\\
&b_5 = x_3 - x_2,\ \ c_5 = y_3 - y_2,\\
&d_1 = b_2 - b_1 - b_3,\\
&d_2 = c_2 - c_1 - c_3.
\end{aligned}
$$

Заменяя известные сразу a_{31} и a_{32} в (16), получим

$$
\begin{aligned}
a_{11} - a_{13}x_1 &= b_1,\\
a_{11} + a_{21} - a_{13}x_2 - a_{23}x_2 &= b_2,\\
a_{21} + a_{31} - a_{23}x_3 &= b_3,\\
a_{12} - a_{13}y_1 &= c_1,\\
a_{12} + a_{22} - a_{13}y_2 - a_{23}y_2 &= c_2,\\
a_{22} - a_{23}y_3 &= c_3.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Заменяя далее a_{11} и a_{12} в (17) через $b_1 + a_{13}x_1$ и $c_1 + a_{13}y_1$ соответственно, получим систему из четырёх уравнений

$$
\begin{aligned}
a_{21} - a_{13}(x_1 - x_2) - a_{23}x_2 &= b_2 - b_1,\\
a_{21} - a_{23}x_3 &= b_3,\\
a_{22} - a_{13}(y_1 - y_2) - a_{23}y_2 &= c_2 - c_1,\\
a_{22} - a_{23}y_3 &= c_3.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Выполнив замену для a_{21} и a_{22} в (18), получим систему из двух уравнений

$$
\begin{aligned}
a_{13}b_4 + a_{23}b_5 &= d_1,\\
a_{13}c_4 + a_{23}c_5 &= d_2.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Систему уравнений (19) мы легко можем решить аналитически, найдя матрицу обратную для

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_4 & b_5 \\ c_4 & c_5 \end{bmatrix},$$

как

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{b_4c_5 - b_4c_4}\begin{bmatrix} c_5 & -b_5 \\ -c_4 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Тогда неизвестные a_{13}, a_{23} это

$$\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты искомой матрицы окончательно

$$a_{13} = \frac{c_5 d_1 - b_5 d_2}{b_4 c_5 - b_5 c_4},$$
$$a_{23} = \frac{b_4 d_2 - c_4 d_1}{b_4 c_5 - b_5 c_4},$$
$$a_{21} = b_3 + a_{23} x_3,$$
$$a_{22} = c_3 + a_{23} y_3,$$
$$a_{11} = b_1 + a_{13} x_1,$$
$$a_{12} = c_1 + a_{13} y_1,$$
$$a_{31} = x_0,$$
$$a_{32} = y_0.$$

4.2. Специальный случай — ‘‘четырёхугольник в единичный квадрат’’

В случае, когда требуется найти преобразование обратное рассмотренному ранее, сначала находят преобразование как для случая «единичный квадрат в четырёхугольник», формируют из полученных коэффициентов матрицу, а затем находят обратную ей. Коэффициенты обратной матрицы и будут искомыми коэффициентами преобразования.